SÚMULA: Revista de teoría y análisis musical
volumen 1, número 1 (enero-junio 2023)
ISSN: 2952-5993

La teoría de la música como intersección entre el análisis armónico y la teoría de números: Pasos hacia una integración disciplinar

Music theory as an intersection domain between harmonic analysis and number theory: Towards a disciplinary integration

Gabriel Pareyón (Instituto Nacional de Bellas Artes y Literatura, México)
cenidim.gpareyon@inba.edu.mx

Resumen

En la música, las nociones de materia, energía y tiempo se sintetizan en juegos de simetría y periodicidad a través del pulso y del ritmo –y silencios como modificadores suyos, por supresión y énfasis–, cuyas composiciones producen complejidad en sucesivos órdenes de autoconstrucción: colecciones tonales, melodías, acordes, texturas, timbres, masas, formas y estilos a lo largo de épocas. En la física, el pulso y el ritmo son descritos por analogías cuánticas, moleculares, cristalinas, gravitatorias, dinámicas y aun caóticas, tratadas bajo modelos matemáticos: objetos, cantidades, matrices, vectores, funciones, campos y operadores. En cierto modo, si se habla de análisis armónico –señales y ondas– y de teoría de números –en los distintos niveles de la aritmética–, es necesario especificar un área de especialización: física, música o matemáticas, con particularidades propias para cada una de ellas. No obstante, la música participa de este conocimiento como una intersección donde las pruebas físicas entran en consonancia con la modelación matemática. La teoría de la música es, de hecho, una tradición que abarca estudios cognitivos y epistémicos que reflejan las cualidades de dicha intersección; por lo que su estudio ayuda a entender el modo en que el análisis armónico y la teoría de números se comunican. Este trabajo postula cómo la música tiene a la vez capacidades referentes, expresivas y simbólicas, pero también propiedades de un metalenguaje inter-aglutinante especial. La mayor atención se enfoca en explicar sus fundamentos teóricos para valorarlos en convergencia con los fundamentos del análisis armónico y la teoría de números.

Palabras clave: análisis armónico, Fourier, teoría de números, geometría, números primos

doi: 10.59180/29525993.a5029681
Fecha de recepción: 17 de abril de 2022
Fecha de aceptación: 24 de febrero de 2023

Abstract

In music, the notions of matter, energy and time synthesize in games of symmetry and periodicity through pulse and rhythm—and silences as their modifiers, by suppression and emphasis—, whose compositions produce complexity in successive orders of self-construction: tonal collections, melodies, chords, textures, timbres, masses, forms and styles throughout epochs. In physics, pulse and rhythm correspond to quantum, molecular, crystalline, gravitational, dynamic, and even chaotic analogies, treated under mathematical models: objects, quantities, matrices, vectors, functions, fields, and operators. In a way, if we are talking about harmonic analysis—signals and waves—and number theory—at the different levels of arithmetic—, it is necessary to specify an area of specialization: physics, music or mathematics, with their own particularities for each one of them. However, music participates in this knowledge as an intersection where physical evidence is in line with mathematical modeling. Music theory is, in fact, a tradition that encompasses cognitive and epistemic studies that reflect the qualities of that intersection; so its study helps to understand the way in which harmonic analysis and number theory communicate. This work postulates how music has referent, expressive and symbolic capacities, but also properties of a special inter-agglutinative metalanguage. The focus is on explaining its theoretical foundations to assess them in convergence with the foundations of harmonic analysis and number theory.

Keywords: *harmonic analysis, Fourier, number theory, geometry, prime numbers*

Introducción en forma de círculo

Desde el punto de vista de la teoría de la música, la geometría, especialmente la del círculo, es un sistema de figuración y representación para el estudio de las recursiones y repeticiones, y las simetrías y transformaciones que caracterizan las distintas cualidades musicales. El concepto de círculo sería, en este caso, representamen de la fenomenología así entendida como "música": una noción expuesta, de hecho, en el ideal que Platón postula en su *República*, en términos de la "serie de círculos" que es la suma de cada una de las oscilaciones, períodos y ciclos que en su conjunto conceptuamos como "existencia de algo en el tiempo" (McClain 1974, 244). De allí la trascendencia implícita de la música, que a través de sus círculos impregna la existencia de lo que a través de ella resuena.[1]

Desde la formulación del referido modelo platónico, hasta el consenso del modelo estándar de la física de partículas, si bien se despliega un inmenso desarrollo teórico, la significación del círculo parece no haber cambiado mucho en este sentido. Es por esto que, a cargo del curso de geometría cuántica en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, Micho Đurđevich (2017) medita lo siguiente:

[1] De acuerdo con Eero Tarasti (2000), hay un trasiego de signos entre la trascendencia y la realidad, lo cual ocupa una medida importante de la semiótica existencial aplicada a la música, en concordancia con el mismo autor (Tarasti 2012). Según esta teoría, la trascendencia de la música consiste en su permanente presencia en la realidad emotiva, subjetiva, figurativa y aun significativa. La música traspasa la existencia sin que sea indispensable como factualidad o presentación; es suficiente con que habite algún margen de la imaginación, la inteligencia, la memoria, la sensación o la emoción, sin que sea necesaria su comprobación como hecho presencial. La música es trascendente porque puede, como de hecho existe, *in absentia*.

> Es fascinante que un objeto geométrico tan simple como el círculo proporcione un campo ilustrativo tan rico para toda una serie de fenómenos puramente cuánticos. Mientras que, de manera correspondiente, la antigua escala musical pitagórica conduce naturalmente a un círculo cuántico simple. (99)[2]

Se requiere establecer un marco de referencia útil a las explicaciones subsecuentes para estos tres conceptos: "simpleza del círculo", fenomenología "puramente cuántica" y "natural conducción" de una escala a un círculo. También se requiere abordar un recuento y síntesis teórica, una narrativa que conecte giros en la historia del pensamiento abstracto con la noción de la música como una fenomenología necesaria, continua y pertinazmente revolucionada. Los siguientes párrafos proponen transitar por ambos derroteros, con la meta fija de explicar y aclarar esta significación de la geometría y el número respecto de la teoría de la música.

La simpleza del círculo se refiere a la posibilidad de representar *n* bucle(s) o vueltas con un mismo "mapa" –o sea, el círculo–; no se refiere a una supuesta facilidad de trazo. De hecho, tanto en calidad de trazo como de inmediatez sucesiva de objetos idénticos y equidistantes –algo que fácilmente podemos formalizar en la recta real, para los números naturales–, la línea recta presenta una simpleza evidentemente mayor para efectuar ciertas tareas de enumeración y relación de operaciones fundamentales. Pero al tomar esa recta –o un segmento de recta– como si fuera un hilo dócil para convertirlo en círculo, emergen otras cualidades y ventajas de enumeración y relaciones que de otra manera serían imposibles o muy complicadas de operar. Es por esto que la fijación de valores numéricos en el círculo, con un módulo determinado, facilita el mapeo de los sistemas musicales.

La fenomenología puramente cuántica a la que se refiere Đurđevich corresponde a las relaciones y procesos emergentes en el campo de las partículas fundamentales, que no tienen necesariamente una correlación con la fenomenología causal de la física clásica, debido a que esta última procede históricamente de la observación sistemática y el método que conduce a descripciones y predicciones precisas. En cambio, la mecánica cuántica emerge de observaciones puramente teóricas que han conducido a una experimentación y una metodología comúnmente anti-intuitivas, con un componente de incertidumbre muchas veces tratable únicamente en términos de probabilidad.[3]

Cabe recordar, por otra parte, que la fenomenología puramente cuántica ha desatado desde hace algún tiempo –al menos desde la consolidación del CERN– una variedad de aplicaciones e interpretaciones de la física clásica y las ingenierías. La física de partículas ha demostrado una enorme utilidad para comprender mejor algunos de los aspectos de la realidad física que anteriormente no tenían una interpretación cabal o suficiente. Congruentemente, para la teoría de la música, la aplicación de algunos de estos nuevos conocimientos permite entender de maneras más satisfactorias conceptos tan básicos como los de pulso, ritmo y tiempo musical. Un ejemplo es el del instante en que el bisel en la embocadura de una flauta o la cabeza de una baqueta sobre la membrana de un tambor entran en acción: el pulso resulta entonces en un sistema –más que en un "átomo" que no tiene parte o división– y el ritmo en un sistema de sistemas.

---

[2] Esta traducción y cualquier otra en el artículo son mías.
[3] Para una introducción divulgativa sobre el tema, se sugiere aprovechar la conferencia de Michael Berry: https://www.youtube.com/watch?v=wTBlKSoUXs&t=4276s&ab_channel=InternationalCentreforTheoreticalSciences

Figura 1. Collar TET con jerarquías tonales –representadas por el tamaño de la tipografía– y con los números de su correspondencia por cada tono según su aparición en la serie de armónicos. La expresión 0 = *Do* se refiere al inicio del sistema armónico para este caso paradigmático.

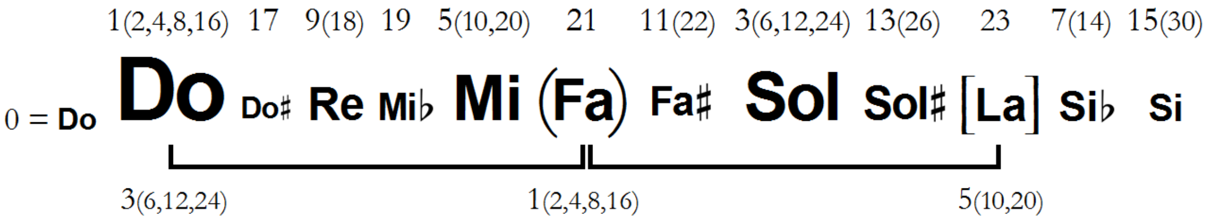
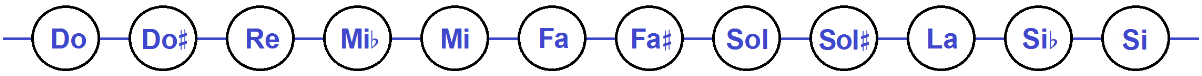


Figura 2. Simplificación de la Figura 1 para elaborar a continuación la Figura 3.



Finalmente, la idea de natural conducción de una escala a un círculo se refiere al peculiar comportamiento de los sonidos musicales organizados en escalas, o sea, colecciones de tonos cuya frecuencia asciende o desciende en una sucesión organizada por jerarquías tonales. Puesto que tal movimiento ascendente o descendente presenta un comportamiento cíclico y las escalas se "repiten" en sucesivos "índices", su morfología se asocia a la de una escala –o escalera– en espiral (Shepard 1982); vista desde sus extremos, tal espiral parece un círculo –así como un cilindro visto desde sus extremos parece un disco– que resulta muy útil para simplificar y esquematizar los pasos de la escala. Esta modelación de la armonía de la música en forma espiral es de hecho una constante neo-pitagórica observable a lo largo de la modernidad (Zarlino 1573; Kepler 1619; Fludd 1621; Ruckmick 1929), cuyas tendencias más recientes incluyen la morfología acórdica, la teoría de la representación musical, la psicoacústica y la teoría de grupos aplicada a la teoría tonal (Shepard 1982; Patterson 1986; Mazzola 1990).

Otra manera de aplicar el círculo en mención es la de organizar las partes de la escala musical en forma sucesiva, formando un collar cuyas cuentas representarían por su tamaño una jerarquía tonal, la distancia consecutiva entre ellas el tamaño de los intervalos –TET, en el caso de las 12 partes del temperamento igual– y la distancia alternativa entre ellas el tipo de jerarquía correspondiente. Justo lo que ya se dijo: como si el hilo del collar fuera una cuerda en vibración convertida en círculo, sin alterar sus propiedades vibratorias y fijando los nodos armónicos del sistema oscilatorio de la propia cuerda (Figura 1).

Una tendencia común en la pedagogía musical es el empleo del círculo de quintas como auxiliar para identificar la correspondencia entre las tonalidades mayores y sus relativas menores, las funciones de la tónica y su inversión en el acorde, y la transposición de los acordes y las progresiones tonales, aunque sin enfatizar la estrecha relación de la "cuerda hecha círculo" (Figuras 2 y 3). Sobre esta estructura se construye el círculo de quintas (Figura 4), que funciona como abstracción útil por sus propias combinaciones y analogías. Este primer círculo puede ser entendido como tensor de un sistema vectorial: al determinar las propiedades intrínsecas de este tensor, se co-determina el sistema de tensores del conjunto tonal, entendido como sistema vectorial –donde la definición de cada parte afecta al conjunto como un todo–. Dado que las propiedades de este sistema pueden ser diversas y complejas, es necesario restringir este primer ejemplo para el caso más familiar a la música tonal, que también es el más simple en ambos sentidos, matemático y musical.

Figura 3. Diseño de la Figura 2 organizado como ciclo tonal. Destaca en rojo la simetría tónica-dominante e inversión (funciones I, V y IV). Aparecen en rosa las relaciones para la relativa menor de la tónica (*la*) en simetría con la tercera menor (*mi*♭), en espejo invertido con la sexta menor (*sol*♯) y tercera mayor (*mi*).

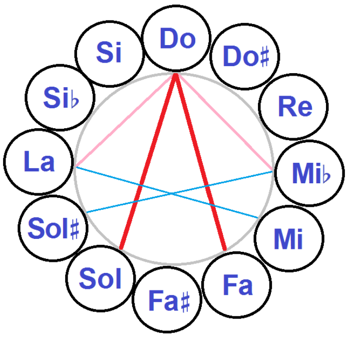
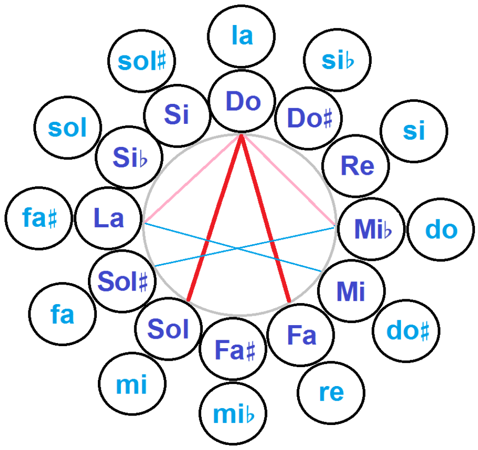


Figura 4. Diseño de la Figura 3 organizado como prospecto constructivo para el círculo de quintas, con una órbita de terceras –tonalidades relativas menores–.



Volviendo a la Figura 1, a pesar de que no se presente en forma de círculo, las propiedades de ciclo y espiral allí contenidas son notorias. Si bien el "punto de partida" es un tono *do*, la ubicación de esta gama tonal –de *do* a *si*– bien puede entenderse como infinita sucesión de sí misma, en diferentes índices tonales –sucesión trivial–. Lo significativo aquí es que existe una estructura armónica subyacente –representada por *do*(*fa*)[*la*]– de gran importancia para la música tonal a pesar de que sus armónicos correspondientes no la revelan de inmediato. En otras palabras, la nota *do* como "fundamental" acapara las mayores resonancias armónicas, siempre siguiendo la razón de duplicación de la frecuencia (1,2,4,8,16, etc.), pero los sonidos armónicos 21 y 23 –respectivamente *fa* y *la*– están demasiado distantes como para recibir importancia en esta jerarquización tonal. Lo que ocurre, como claramente marcan los corchetes horizontales en la misma Figura 1, es que el *fa* opera como potencial "tónica" de *do* –para la posible relación *fa*-*do*[4]–, mientras que el *la* corresponde a la siguiente jerarquía en la escala de *fa* –junto con la relación no trivial de *la* menor como tonalidad relativa de *do* mayor–. En conjunto, esta estructura subyacente articula la coherencia en las progresiones de acordes, y no solamente representa pasos entre notas.

[4] A pesar de que la Figura 2 parece sugerir que nos encontramos en la tonalidad de do mayor, el esquema podría usarse para denotar que nos encontramos en la tonalidad de fa mayor. Si así fuera, el *do* inicial se debería entender como grado V de esa escala.

Ahora bien, la estructura matemática subyacente para la organización tonal y de los sistemas de progresión entre acordes parte de la forma en que están organizados los números primos como sucesión a partir de 2. Tal y como está demostrado en Pareyón (2011, 341-344), la sola sucesión de divisiones de primos se puede anotar a modo de escala (Figura 5):

3/2, 5/3, 7/5, 11/7, 13/11, 17/13, 19/17, 23/19, 29/23, 31/29

Así como en la escala de la serie armónica, para la generación del intervalo de cuarta justa se acude a la inversión del quinto grado –aunque bien podría alegarse la inversión de la tónica, convertida en dominante–, en este caso podemos referirnos a una inversión del primer intervalo de segunda menor {1/1, 31/29}, para así generar la séptima mayor –la nota faltante para la altura *si*, marcada con un aspa en la Figura 5–. No es una casualidad que esta escala primal resulte tan parecida a la escala cromática del temperamento igual: mientras que la primera revela la naturaleza autogeneradora de la armonía a través de los números primos, la segunda resume esta naturaleza con el uso del número $\sqrt[12]{2}$ para simplificar la magnitud del semitono cromático estándar. Se advierte además, en este parentesco aritmético entre ambas escalas, que los números que aparecen en la Figura 5 son de hecho los primeros once elementos en la sucesión inicial de los números primos, más el elemento aspado de concatenación de la escala, lo que concuerda con el conjunto total cromático de 12 semitonos (Pareyón 2011, 392).

En congruencia con lo anterior, inclusive los acordes y las funciones tonales pueden analizarse como relaciones entre números primos y productos subsidiarios –por factorización– que explican las llamadas jerarquías tonales, al menos en un nivel esquemático para la comprensión de las estructuras musicales. Si la escala generada con divisores primos es resultado de un procedimiento puramente matemático, una escala análoga –de hecho, la mostrada en la Figura 1– es obtenida por un procedimiento físico cuya primera formalización se atribuye a la tradición pitagórica, aunque con la sucesión armónica simplificada: 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, etc. Las diferencias entre una y otra se deben a que, mientras la escala primal es de carácter aritmético –división entre los primos–, la pitagórica análoga es de carácter ordinal –sucesión de la serie de armónicos, numerados de manera consecutiva–, en este caso compuesta por factores primos (Figura 6).

La sucesión numérica en dicha figura comienza por el primer intervalo armónico (*do-do* = 1) y entre paréntesis el primer número primo –segundo armónico– como pivote entre los intervalos de octava y quinta. El siguiente número primo es el tercer armónico, generador del V grado –y sus duplicaciones u octavas–; el siguiente es el quinto armónico, generador del III grado –ídem –; luego el séptimo armónico, correspondiente a la séptima menor. Sigue el 11º armónico, que corresponde a la quinta disminuida, el 13º correspondiente a la quinta aumentada, el 17º a la segunda menor, el 19º a la tercera menor y el 23º a la sexta mayor.

En el sistema inferior de la Figura 6 –corchetes horizontales–, los números primos indican el sustrato *fa-la-do* con la función del IV grado, por analogía directa con los grados V y III –aquí abajo armónicos tercero y quinto del mismo *fa*–. Cabe aclarar que comenzamos con la organización de una escala –como fenómeno tanto físico como musical– en la Figura 1, y poco a poco nos desplazamos para conectar esa misma organización con la geometría característica de las funciones tonales. Es decir, se trata de un proceso emergente a partir de un conjunto de relaciones que son, a la vez, audibles y aritméticas.

Figura 5. Escala primal (Pareyón 2011, 353).

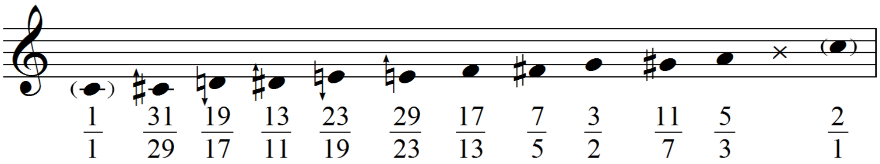


Figura 6. Copia de la Figura 1, aquí marcados en rojo los números primos generadores de la escala, con números anaranjados para los generadores de la función del IV grado (*fa-la-do*).

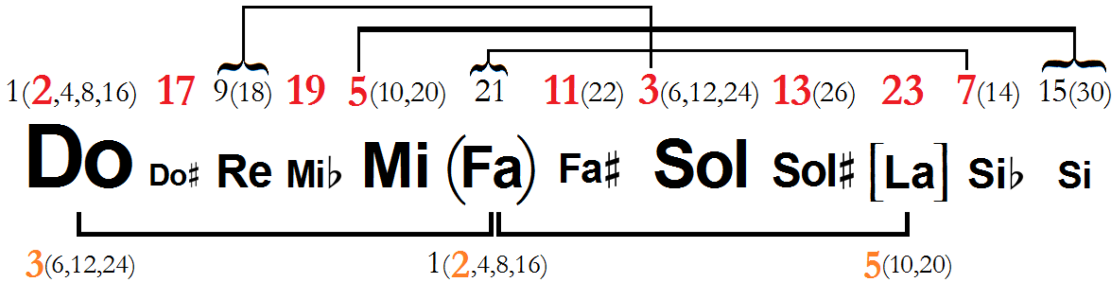
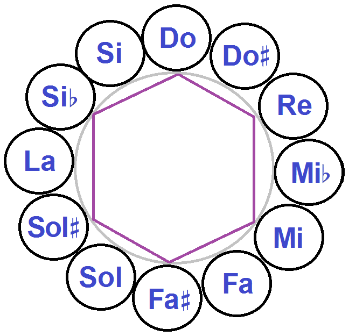


Figura 7. Escala de tonos enteros mapeada como hexágono al interior del ciclo tonal.



Se advierte, por otra parte, que los "pseudo-generadores" 9 (*re*), 15 (*si*) y 21 (*fa*) no son primos: corresponden a tonos que son operados respectivamente por los factores primos 3, 5 y 7. Según este esquema, el grado II es subsidiario del V, el grado VII –con su quinta disminuida– es subsidiario del III y el IV lo es del ♭VII: algo que concuerda con la lógica musical tradicional si se ven estas relaciones como tendencias del tipo I-V –o sea, *sol-re*, *mi-si*, *si♭-fa*–.

Para la escala primal, los números racionales compuestos por números primos más pequeños tienen un mayor rango tonal o mayor peso armónico (2/1, 1/1, 3/2, 5/3, 7/5) por contraste con los más grandes, con menor peso armónico (11/7, 13/11, 19/17, 23/19, 29/23), hasta llegar a los límites del sistema tonal –31/29 o semitono primal y su referida simetría para formar la séptima mayor–. En cambio, para la escala pitagórica análoga (2, 3, 5 / 7, 11, 13 / 17, 19, 23 / {3, 5, 7}$_{9,15,21}$) sobresale más bien el potencial relacional de las funciones tonales por tríadas y por grados de tensión armónica. En absoluto se trata de dos interpretaciones que se oponen, sino que se complementan desde dos perspectivas distintas. La inscripción del hexágono en el círculo de tonos de la Figura 3 (Figura 7) enfatiza el rol estructural de los números primos para la armonía tonal, pues en un máximo de economía funcional evidencia la relación entre la cardinalidad de la escala primal con la ordinalidad de su propia sucesión (2, 3, 5, 7, 11, 13).

De la geometría tonal a la interpretación dinámica

Líneas arriba se menciona que un cilindro visto desde sus extremos parece un disco; en cierto modo podemos decir que el disco es una extensión conceptual del círculo, y que –por analogía– el disco es al cilindro lo que el punto es a la línea. Si en la convención euclídea el punto es aquello "que no tiene partes" (Eucildes [s.f.] 1991, 189) y su sucesión infinita e invariable forma una línea recta, por analogía, una sucesión infinita e invariable de círculos adjuntos formaría un cilindro. Si esta conceptuación es aceptable, entonces la superficie longitudinal del cilindro puede ser útil para mapear las espirales de la armonía, no solamente de manera esquemática y formal, sino también en términos de una representación de la música por su actuación en la práctica (Shepard 1982).

La transición y la adaptación de los modelos armónicos en el círculo, en la espiral, en el disco, en el cilindro y en el toroide –un cilindro conectado en sus extremos consigo mismo, en forma de rosca– coinciden, de hecho, con la trayectoria del trabajo teórico de Guerino Mazzola. Su obra marca el inicio de una formalización de la armonía tonal por isometrías afines –traslación, simetría o rotación– con la ampliación y fragmentación de la Figura 7, y sistematizados en 144 "perspectivas tonales" –72 consonantes y 72 disonantes– que describen el total de las funciones de la música tonal (Mazzola 1990).

Un mapeo maximizado de las funciones tonales en la superficie toroide permite notar cómo se entretejen las progresiones armónicas formando un todo interrelacionado por juegos de proporciones y transformaciones. Inicialmente, Mazzola implementó 12 círculos ecuatoriales y 6 círculos meridianos en la superficie toroide, suficientes para esta descripción –nuevamente bajo la analogía del total cromático de la escala y la ordinalidad primal [2, 13]–. Pronto se hizo obvio que esta organización tonal coincide con la *Tonnetz* originalmente descrita por Leonhard Euler (1739) y formalizada como una teselación de hexágonos por Douthett y Steinbach (1998) para representar la simetría del espacio tonal. De hecho, responde adecuadamente a todos los sistemas micro- y macrotonales –es decir, con intervalos básicos menores o mayores al semitono– que cumplen con la propiedad llamada de "buena formación", enseguida explicada, para lo cual será necesario referirnos primero a los conceptos de transformación, isomorfismo y automorfismo.

Como préstamo de las matemáticas a la teoría de la música, un caso útil de transformación es el mapa de un objeto o proceso en otro objeto o proceso correspondiente que conserva aspectos clave de sus simetrías, proporciones o funciones. Una vasta gama de objetos y procesos musicales se transforman en diferentes operaciones como retardo, expansión, disminución, reflexión, rotación o prolongación. Algunas de esas transformaciones se caracterizan por una línea invariable –por ejemplo, un eje de inversión o simetría– y un factor de escalamiento, y muchas conservan sus propiedades de conjunto y aun las relaciones entre sus elementos uno a uno; por lo tanto se dice que son procesos isomorfos. Un isomorfismo que mapea un grupo sobre sí mismo en una relación de sus elementos y relaciones es un automorfismo.[5]

Lewin (1990) sugiere que las transformaciones de clases de tono corresponden a redes isomorfas-isográficas –llamadas redes de Klumpenhouwer– relacionadas con automorfismos específicos, dado que para una generalidad de sistemas armónicos existen protocolos de conmutación, combinación, inversión y partición, habilitados en su sintaxis propia como estructuras algebraicas que caracterizan las construcciones musicales. En consecuencia, el automorfismo en las escalas y los acordes es un

[5] En el contexto de la teoría musical, estos conceptos de isomorfismo y automorfismo aparecen en Babbitt 1961, Morris 1987 y Lewin 1990.

requisito previo a la buena formación (*well-formedness*) como consistencia estructural armónica (Carey y Clampitt 1989, 196). Sin embargo, los automorfismos no solo ocurren entre sistemas de acordes, sino también –y al menos– en una variedad de relaciones rítmicas, melódicas, contrapuntísticas y texturales. Es por esto que una parte significativa de los postulados de Mazzola sobre la formalización de la construcción melódica o armónica corresponde por analogía en planteamientos de carácter rítmico como, por ejemplo, el mapeo geométrico del ritmo según Toussaint (2019).

El referido trabajo de Mazzola sobre el estudio de las geometrías y topologías al interior de los círculos, ciclos, espirales, esferas, toroides –y las transformaciones tonales al interior de esos espacios– es, por lo que se ha dicho hasta aquí, aplicable a las historias de la música por sus prácticas. Así como la lingüística diacrónica podría dar cuenta de una trayectoria de transformaciones en un tiempo y un espacio específicos, la musicología es capaz de combinar el estudio de las singularidades culturales con la mayor extensión de los principios de elaboración y coherencia musical, a lo largo de la historia y la geografía cultural de la música. Carey y Clampitt (1989, 206) consideran una relación de coherencia entre un conjunto de escalas tradicionales bajo la noción de buena formación para las escalas pentatónica, diatónica y cromática, que comparten la misma estructura subyacente de buena formación. Añaden a este marco teórico "la relación tónica-subdominante-dominante para los sistemas arábigo de 17 tonos, y chino de 53 tonos, y otros sistemas de alturas en la música no occidental"; esencialmente, su postulado se refiere a la coherencia estructural de las escalas por su afinidad proporcional y funcional (187).

Sin pretender subestimar las diferencias entre distintas culturas y tradiciones musicales, y sin presumir una analogía directa y continua para equiparar todos los parámetros de la música, vale poner de relieve el criterio de ley potencial para poder comprender las causas y las razones de unos principios constructivos y poéticos –en el sentido creativo de la etimología– para la concepción de la música y la realización de la práctica musical. Las leyes potenciales emanan de principios físicos generalizados por la segunda ley de la termodinámica, la cual expresa que la cantidad de entropía de cualquier sistema aislado termodinámicamente tiende a incrementarse con el tiempo. Esto implica que, cuando una parte de un sistema cerrado interacciona con otra, la energía tiende a dividirse por igual, hasta que el sistema alcanza un equilibrio térmico. Congruentemente, respecto de una ley potencial, la frecuencia de un evento en un sistema tiende a la subdivisión progresiva, de modo que los eventos secundarios del sistema son muchos y los eventos cruciales son pocos. Esto resulta, además de inteligible, familiar para el músico y la comunidad musical, debido a la constante experimentación de la música como sistema de sistemas de eventos cruciales por su relación con eventos secundarios: acorde generador y subsidiarios, tono fundamental y aura tonal, pulso principal y cohorte métrica, motivo rector y melodía, grano acústico y textura sonora.

Es esto lo que faculta al trabajo de Mazzola para que, a través de un mismo modelo geométrico, se puedan ver las tramas, las modificaciones, las tensiones y distensiones en una gran variedad de fenómenos musicales. Entonces se vuelve posible, por ejemplo, extender el uso de un molde del tipo Figura 7 –geometría simple de las escalas y los acordes– a la dinámica gestual, como un sistema complejo de curvas y atracciones variables en el hecho de la práctica musical. Inclusive, de una transición y adaptación de los modelos en el círculo, en la espiral, en el disco, en el cilindro y en el toroide, ya no para representar acordes, sino para valorar los gestos interpretantes.[6]

[6] Esto es, precisamente, el contenido de Mazzola 2017, donde inclusive recurre a un modelo cilíndrico, esta vez para describir un proceso-trayectoria termodinámico para una gestualidad musical realista.

Círculo, onda, masa, redundancia e información

Las leyes potenciales, que parecen unificarlo todo, en realidad preconfiguran una panoplia de variedades causalmente inconexas, o bien agrupan fenomenologías y ontologías muy distintas que, por suceder a partir de los mismos principios, pueden compartir devenires superficialmente comparables. Vemos ondas en muchas señales que comportan energía, innumerables círculos en sus procesos de expansión, pero también círculos y esferas en procesos de integración o en la concentración de energía que llamamos masa. En este infinito mar de señales –navegable en matemáticas gracias a las funciones periódicas– abunda la redundancia y el ruido como redondez sin código; también atestiguamos el balance termodinámico que, a partir de la disipación de las fuerzas redundantes, posibilita un tipo de orden que reconocemos como información. Entre ello se manifiesta el tipo de sistemas de proporcionalidad y de atribución de código por medio de lo que hemos llamado ritmo y armonía, dos expresiones de una misma fenomenología.

La noción de una armonía universal directamente involucrada con la esfera, el círculo y lo redondo conforma una larga historia. Cabe recalcar la importancia del espacio de parámetros para las funciones periódicas, pues la periodicidad en tal espacio –y no el círculo en sí mismo– es el estricto origen matemático del valor π (Rudin 1987, 1-4). Su origen histórico asimismo procede de la persistente investigación de las periodicidades naturales, y no de la abstracción del círculo. El empleo moderno de π en el estudio de la armonía solar planetaria se remonta por lo menos a los trabajos de Copérnico (1543) y Kepler (1619), y en la astronomía moderna abarca una vastedad de aplicaciones relacionadas con la expansión esférica de la energía, junto con su creciente complejidad armónica interferencial, con la difracción de la luz, y con un universo de cuerpos que tienden a la forma esférica a causa de la constante gravitatoria. Este último aspecto fue formalizado por Karl Schwarzschild (1916) en su estudio para el campo gravitacional de una esfera de masa, lo que daría pie a una ciencia de las estrellas y los agujeros negros en que la modelación física reitera la validez astronómica del número π. No es posible omitir, en este sentido, que Paul Hindemith (1937) –uno de los teóricos de la armonía musical más conocidos del siglo XX– entendiera las relaciones y funciones armónicas como sistemas "gravitatorios".

En el campo de lo ínfimo, los fermiones se autoorganizan hasta configurar núcleos de átomos con orbitales que solemos representar como nubes probabilísticas en forma esférica. Una adaptación lógica de este modelo estadístico para el estudio del género y el estilo musical se encuentra en mis trabajos (Pareyón 2011, 186-197; 2021, 68-72). El uso de la teoría de probabilidades como adaptación de la teoría de conjuntos difusos (*fuzzy sets*) a la teoría de la música es uno de los frentes de trabajo más prometedores en este campo, como puede verse en los resultados obtenidos por Jaramillo Ramírez (2022). El valor fijo del momento angular de las partículas fundamentales se calcula, de hecho, por la constante de Planck dividida entre 2π. Estos fenómenos minúsculos transmiten sus tendencias estructurales hacia la organización molecular, generalmente ampliando su complejidad interferencial en órdenes superiores de organización. Por ejemplo: una imagen de los fonones como sistemas pre-acústicos en vibración periódica (Gabor 1947), a distintas frecuencias parece multiplicar en gran escala el comportamiento de los orbitales atómicos según se observa al producirse las figuras de Chladni, bien conocidas en el ámbito de la acústica (Ashton 2001). Dicho lo cual, valga insistir en que la referida complejidad interferencial actúa de tal manera sobre las llamadas propiedades emergentes de los sistemas; así, desde el nivel molecular se observan asimetrías y divergencias en las estructuras y comportamientos que separan a las dos físicas, la clásica y la cuántica, sin embargo abarcadas desde una misma lógica matemática. La teoría de cuerdas, que interpreta las partículas como "puntos", objetos que se propagan hechos "cuerdas" en un espacio de una sola dimensión, es en cierto modo una extrusión del punto euclídeo, con su analogía en la partícula clásica. Esta misma teoría se extiende a una relación de supersimetría entre bosones y fermiones en espacios de múltiples dimensiones, donde la suficiencia de 11 dimensiones se conoce como Teoría M, que pretende unificar las fuerzas fundamentales.[7]

La razón de profundizar en una familiaridad con la fenomenología puramente cuántica descrita al inicio del presente artículo coincide con la motivación por la que Mazzola (2017) considera necesario avanzar hacia una "teoría musical de cuerdas". Si esta perspectiva permite entender de maneras más satisfactorias conceptos tan básicos como los de pulso, ritmo, tono, gesto y tiempo musical, entonces se abre la posibilidad de unir las dos físicas –la clásica y la cuántica– a través de una cognición experimental donde la teoría musical operaría como un metalenguaje inter-aglutinante. Dando primeros pasos en este camino (Cartwright et al. 2010; Pareyón 2011; 2015; 2016; 2017), vislumbramos que las bases de la física estadística, por una parte, y las de los sistemas dinámicos, por otra, comparten funciones escalares que requieren de investigación interdisciplinar. Entre otras cosas, porque la física estadística opera en planos análogos respecto de la teoría de números, y los sistemas dinámicos están abiertos a una analogía metodológica respecto del análisis armónico.

El método de agotamiento atribuido a la tradición de Arquímedes –que consiste en reducir el área de polígonos regulares hasta refinar un anillo tan regular y adelgazado en el infinito coincidente con el círculo– es por una parte el principal antecedente del concepto de círculo cuántico, y por otra parte la intuición que dio pie a la geometría analítica, al cálculo de variaciones y finalmente al análisis armónico. A través de su principal herramienta, la transformada de Fourier (1822), permite interpretar los fenómenos termodinámicos como espectros frecuenciales en el tiempo y el espacio.

Precisamente, la noción de la expansión y el incremento del calor en un cuerpo sólido –por ejemplo, una placa de metal– dio pie al estudio original de Joseph Fourier para formular la ecuación diferencial que describe la evolución de la temperatura a través de series trigonométricas. Esta es la base teórica para la transformada de Fourier que generaliza el comportamiento termodinámico, no solo para un placa en calentamiento, sino para otros cuerpos, como una cuerda, un tubo o una membrana, sujetos a una tensión de energía o expansión de calor por mínima que sea –por ejemplo, en los componentes de un instrumento musical o en la voz humana misma–. De allí la enorme relevancia de la transformada de Fourier en el estudio de los sistemas armónicos en general.

Entre los matemáticos de mediados del siglo XIX que más se interesaron en el modelo de Fourier estuvo Peter Gustave Lejeune Dirichlet, a quien se debe la función matemática para investigar la sucesión de los números primos como si fuese un fenómeno termodinámico. El espectro de Fourier para esta función sería, pues, el análisis necesario para explicar la estructura profunda de los números. Casado en 1832 con Rebecka Mendelssohn, hermana del célebre compositor de ese apellido, Dirichlet (1863) creía que cabía conjeturar un comportamiento geométrico-armónico análogo a la armonía

[7] Una reciente demostración efectuada por la matemática Maryna Viazovska establece que el empaquetamiento más eficaz de esferas en un espacio requiere de 8 o 24 dimensiones, noción que enriquece la modelación de armónicos en el tamiz de Apolonio en su escalamiento esférico multidimensional (Cohn et al. 2017, 49), con consecuencias para el estudio físico de los materiales y una extensión sobre ellos para la teoría de armónicos en relación con la autosemejanza estructural (Guyon, Delenne y Radjai 2020).

musical vista como fenómeno termodinámico, para formular una explicación general para la teoría de números. El desafío tomó tal magnitud que su vida no alcanzó para progresar en esta conjetura a su completa satisfacción; el problema fue heredado por sus dos principales alumnos: Richard Dedekind y Bernhard Riemann. A este último se debe la formulación definitiva sobre la estructura de los números primos conocida como hipótesis de Riemann, que al día de hoy continúa abierta.

A pesar de lo anterior, los alcances del análisis de Fourier son extremos, sobre todo si consideramos que la teoría cosmológica actual es una teoría de la expansión del calor. Se trata de una expansión de expansiones variables en el tiempo y el espacio, bajo los dos mayores enfoques de la física: el astronómico y el cuántico. No es este el lugar para profundizar en estas dos grandes áreas de la ciencia; baste señalar que los ciclos de nucleosíntesis con que se producen los elementos químicos en el interior de las estrellas siguen un camino orientado por la producción primigenia de hidrógeno y helio, en una sucesión multiplicativa que hasta cierto punto recuerda una estructuración física-armónica (Pareyón, 2016).[8] Del otro lado, en la perspectiva cuántica, está la configuración de los fermiones que organizan la materia a partir de partículas fundamentales y compuestas, con un giro por el cual tienen un momento angular intrínseco de valor fijo. Los valores para dicho momento angular son 0, 1/2, 3/2 y 5/2 para los fermiones; además de los valores complementarios de los bosones: 0, 1 y 2.

En el sentido pitagórico más tradicional, la teoría de la música reconoce valores físicos fundamentales como la base misma de la música y sus criterios de armonización en términos de doble (2/1) o mitad (1/2) de una frecuencia caracterizada como octava; el tercer armónico caracterizado como quinta (3/2), y la razón de 5/2 involucrada con los dos armónicos subsiguientes llamados de tercera, que convencionalmente se componen por 5/4 y 6/5. Sin embargo, una lectura rigurosa de estos datos puede juzgar que esta sea una interpretación *ad hoc* del concepto de giro angular cuántico, pues la relevancia de estos números se encuentra en relación a las propiedades intrínsecas de las partículas y su comportamiento propio. En contraparte, se puede justificar que los datos referenciados en sí mismos presentan una lectura naif para la teoría de la música, dado que no necesariamente implican complejidad musical. En cualquier caso, lo relevante en esta interpretación no es el número como representación de la armonía –por ejemplo, como lo hubiera formulado Zarlino (1573) o cualquier otra versión de la tradición pitagórica–, sino las propiedades de los objetos y procesos a que se refieren. Son cualidades inherentes a las formas y transformaciones de los elementos integradores de la música, que de hecho son las cualidades algebraicas con las que se investiga la música mediante aplicaciones, por ejemplo, a las funciones armónicas y sus transformaciones en sus elaboraciones melódicas y contrapuntísticas, inclusive en sus formas más elementales –por ejemplo, la simetría rítmica y sus modulaciones– como sistemas de propiedades características. En consecuencia, la geometría clásica está lejos de ser un campo agotado para la teoría de la música, sobre todo si tomamos en cuenta que las operaciones básicas de la geometría pueden conectarse y extenderse al estudio de la teoría de grupos, históricamente a partir del programa de Erlangen (Klein [1872] 1893, § 1).

Quizás el aspecto más básico de la geometría musical pueda ser su invariancia dimensional y escalar, bajo los conceptos de modulación y constante escalar, que en teoría de la música y en matemáticas suelen tener definiciones distintas y sin embargo relacionadas y útiles en su diferencia. Esto comprobadamente ocurre para los sistemas de afinación y escalas que tienen la propiedad de buena formación inherente a esas mismas escalas proyectadas como teselaciones –baldosas, mallas,

[8] Tema actualmente en revisión y consolidación.

esteras, escalas– de triángulos y hexágonos, cuyos vértices, aristas y contigüidades simbolizan elementos de interés sustancial para la teoría de la música en homología con las matemáticas. Este enfoque, capital en el trabajo de Ervin M. Wilson y sintetizado por Narushima (2018), es además un campo prometedor para la exploración de (nano)materiales –cuerdas, cristales, placas, tubos, membranas– como sistemas armónicos en ambos sentidos, físico y musical, pero también con gran interés para la biomusicología y la biomedicina (Pareyón 2015; 2017).

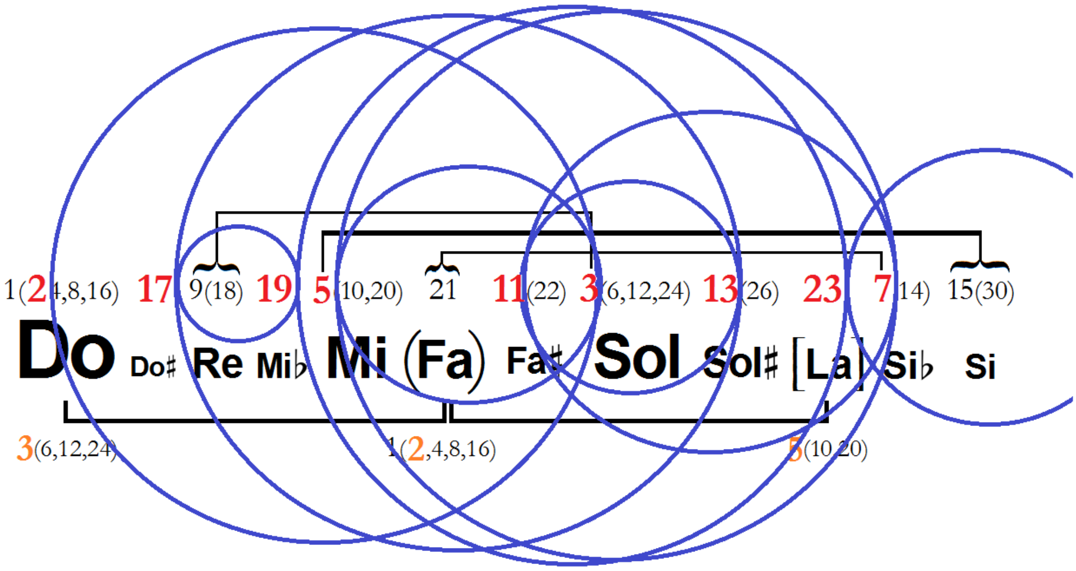
Sobre la periodicidad de las teselaciones armónicas, en ciertos niveles de complejidad vuelven a aparecer círculos abstractos que reproducen a mayor escala las propiedades intrínsecas del sistema armónico; así llegamos –de nuevo y por otra vía– al círculo de quintas. El intervalo de quinta –la razón 3/2– y su periodicidad y sus ciclos constructivos en relación con las terceras (5/4, 6/5, 7/6, 9/7), configuran la base de tradiciones armónicas tan disímiles como la mesoamericana –fundada en el intervalo del *boxel ak* o del *teponaztli* (Pareyón y Pina-Romero 2017)–, la del norte de la India –con 22 intervalos de *srutis* (Barlow 2011, 21)– o la "clásica" tonal occidental (TET). Sin embargo, bastante antes del surgimiento de grandes círculos y de los ciclos de ciclos que caracterizan la complejidad musical, emergen relaciones cúbicas y poliédricas que orientan al mismo proceso de gradual complejización de la armonía. No es necesario extraviarse en tal complejidad sin antes observar cómo ya las estructuras cúbicas alojan una riqueza que, en forma cristalina, capturan el universo de las relaciones de buena formación, especialmente cuando esas estructuras alojan isomorfismos comparables a las geometrías carbónicas expresadas como diamantes con vértices trigonales, "gemelos" del diamante con vértices tetraédricos (Fukunaga et al. 2022).

El grupo de enciclopedistas de la música microtonal encabezado por Joseph Monzo –al cual podríamos añadir de manera independiente a Franck Jedrzejewski– formaliza un "diamante tonal" cuyos rayos se componen por la más amplia colección de sistemas de afinación a su alcance.[9] Las distintas geometrías que aparecen en esa abstracción se contextualizan en torno a un gran hexágono mediante sus aristas en correspondencia con los intervalos clásicos de tercera mayor (5/4), quinta justa (3/2), tercera menor (6/5), sexta menor (8/5), cuarta justa (4/3), y sexta mayor (5/3). No obstante, tal hexágono anida en un sistema todavía más amplio de geometrías con vértices trigonales,[10] como podría verse si se incluyesen sistemas interválicos más extendidos como el pelógico –del indonesio *pelog*– común en la tradición armónica del gamelán.

Tanto en los sistemas de afinación y armonización musical como en los de geometría y cristalografía, vienen al caso las redes de Bravais, de propiedades invariables como grupos de traslaciones y simetría rotacional, de manera que desde cualquier nodo de la red persiste la capacidad constructiva para el conjunto del sistema armónico de la misma red (beim Graben y Mannone 2020, 335). Sus nodos son interpretados como vértices o átomos y sus celdas o teselas cubren la totalidad del espacio mediante traslaciones sin que queden huecos ni solapamientos. Las propiedades de estas redes configuran las mallas regulares de hexágonos en las láminas de carbono puro de espesor igual a cero, conocidas como grafeno, así como en campos ferroeléctricos en mallas de otros materiales. Estas estructuras son análogas a las teselaciones de la música en la red de hexágonos para las funciones tonales: la *Tonnetz* –mencionada previamente–, así como su analogía en el toroide. De este modo, las

[9] http://www.tonalsoft.com/enc/e/equal-temperament.aspx
[10] En cristalografía, el término *trigonal* indica uno de los siete sistemas cristalinos del espacio tridimensional. Un sistema cristalino se caracteriza por elementos de simetría característicos a partir de un eje de rotación ternario.

Figura 8. Adaptación de las Figuras 1 y 6 para describir con círculos la sucesión armónica de los primeros números primos –de 2 a 23, en rojo– dispuestos de izquierda a derecha como un sistema de ondas.



analogías físicas de la armonía musical se multiplican en la ingeniería de materiales, como si esta pudiera, de alguna manera, interpretar la musicalidad molecular a través de sus propiedades físicas.

En tres dimensiones, la forma clásica cristalina del carbono puro genera cubos cuyas características físicas son comparables a las órbitas de la música tonal según la modelación de Estrada y Gil (1984). Otras formas de cristalización periódica –triclínica, monoclínica, ortorrómbica, tetragonal, romboédrica, hexagonal– son comparables respecto de sistemas de acordes por sus cualidades de rotación y transformación, comprensibles por la teoría de grupos, especialmente en la simetría de cristales que propone el mismo Estrada bajo el concepto de permutaedro, para la identidad de intervalos en melodía, armonía y ritmo musicales (Estrada y Adán 2004).

Los arreglos geométricos del grafeno, los fulerenos, los grafitos –superposición de grafenos–, los diamantes y una diversidad de alotropismos[11] generan una fenomenología hasta cierto punto comparable a la de los automorfismos; es así que el propio Mazzola reconoce una necesidad matemática para modelar la relación entre geometría tonal y articulación gestual, a través de la geometría abstracta de un "diamante" como síntesis estructural (Mazzola y Andreatta 2007).

Regresemos a la Figura 6 para reconocer ahora cómo se distribuye el orden de los armónicos en correspondencia con el inicio de la sucesión de números primos y así configurar, por su ordinalidad, los rangos de la armonía musical en empatía con las categorías y jerarquías constitutivas de la melodía y el ritmo (Figura 8). A partir de esta recapitulación, el diagrama intenta expresar cómo tal distribución

[11] Esto último fue el centro de mi participación en las dos primeras ediciones del Congreso de la Asociación Mexicana del Carbono (Pareyón 2015; Pareyón, Chavarría-Velázquez y López-Martínez 2017). Cabe añadir que durante mi estancia como colaborador del Royal Northern College of Music, integrado al campus central de The University of Manchester, atestigüé el inicio de la "revolución del grafeno" a partir de 2009. Con el trabajo de Andre K. Geim y Konstantin Novoselov (2007) se demostró la viabilidad de su uso e impacto en la ciencia de materiales, aunque todavía sin atisbos de su analogía musical, apenas sugerida entre las conclusiones de mi tesis doctoral (Pareyón 2011, 481-484).

armónica va de una fuerza generatriz organizadora, hacia una rápida expansión en que la energía decrece y la entropía aumenta. Se trata de un reflejo de la segunda ley de termodinámica, pero también de la persistencia directriz de una ley de potencia. Observamos en esta misma figura que aquello que un músico reconoce como tonos de una escala corresponde a un sistema de distribución y proporcionalidad de la energía que se disipa en un sistema armónico. Ahora resulta más evidente que tono, energía y número están estrechamente relacionados de acuerdo con lo que había imaginado Dirichlet. En resumen, parecería que la organización "genésica" de los números primos y la expansión de la materia/energía en el tiempo son mera analogía. La tarea de la teoría de la música en este ámbito sería averiguar qué tanto la física y las matemáticas concurren en un mismo principio, pero discurren en sus metodologías y enfoques especializados.

Final: ¿Es el cosmos un macroacorde?

Precursor de la física nuclear, Enrico Fermi consideraba que los ritmos y las tonadas más simples abundan como fenómenos físicos que anteceden la música humana (Bretscher y Cockcroft 1955, 74). Es de hecho cuatro siglos atrás, que Zarlino (1573) –uno de los tratadistas renacentistas más vigentes al día de hoy– puso el mayor empeño en explicar las relaciones entre música mundana y música humana en ese mismo contexto, de manera que la primera de ellas conforma la matriz física de nuestros cantos, melodías, danzas y sinfonías, y es también un puente hacia una armonía mucho más general. Por esto, Rubén Darío –en varios sentidos precursor del musicólogo Alejo Carpentier, además de ser el mayor de los nuevos pitagóricos en el Modernismo literario– afirma en su inacabada *El oro de Mallorca* que "[t]odo el universo visible y mucho del invisible se manifiesta en sus rítmicas sonoridades" ([1914] 1990, 144-145).[12]

El agua, los fluidos, los prismas, son portadores de esta poesía. Cuando en la vida cotidiana observamos el comportamiento de burbujas sobre un medio líquido, percibimos un poco la relación entre la malla de pentágonos y hexágonos –típica de procesos orgánicos armonizantes– y su expresión en burbujas que intuimos como "esferas" o "ampollas".[13] En esos procesos también notamos que los hexágonos no siempre parecen perfectos: se jalan un poco hacia una de sus mitades trapezoides, o incluso se forman huecos que ya no corresponden a nada parecido a un hexágono, sino a una figura base de más o menos lados irregulares. Algo similar ocurre en la música cuando, en lugar de emplear hexacordes, se usan pentacordes o heptacordes, alterándose el conjunto de las propiedades de las escalas, incluyendo sus centros tonales y relaciones subsidiarias a lo largo de duraciones diversas.

Entre los teóricos de la música que actualmente reconocen una profunda significación recíproca para la física, la música y las matemáticas, Jedrzejewski recupera el sentido filosófico de Leibnitz de mónada, bajo una relectura deleuziana, con la conclusión de que tal mónada "contiene una representación del mundo y que en el universo definido como la clausura ontológica de las cosas, la individuación de una categoría corresponde en última instancia a su monadicidad" (Jedrzejewski 2020, 130); individuación que, sin embargo, abarca infinitas variaciones de sí misma. Entonces la biología y

[12] La sugerencia de retomar al nicaragüense para enriquecer un marco teórico en el estudio de la tradición pitagórica es una tarea pendiente que no ha recibido suficiente atención después de Skyrme 1975.

[13] Ampolla, del latín *ampulla*, literalmente "botellita", derivado del griego ἀμφορεύς: ánfora, justo como las que tradicionalmente se describen en la escuela pitagórica de afinación, con la que supuestamente Pitágoras impartió a Filolao la enseñanza de la armonía universal, golpeando ánforas con diferentes tamaños y volúmenes de agua, dispuestas por una sucesión de medidas racionales (Teón de Esmirna [s.f.] 1966, I-12 *bis*).

la inteligencia viva no están esencialmente separadas de la abstracción matemática y su implementación física, sino íntimamente compenetradas con estas últimas mediante un continuo-discontinuo armónico que, en términos musicales, podríamos resumir a través de un complejo –coordinación de mónadas– autosemejante-autodisímil (Pareyón 2011, 469-471). Una imagen igualmente precursora se halla en Darío, que ahora conjuga la poesía con la música de las matemáticas.

El relato de la armonía pitagórica, su vínculo con el atomismo dialéctico y su empírica comparación cotidiana presentan, sin embargo, dificultades en su desgranamiento teórico dado que la tradición física reconoce que el comportamiento cuántico no sigue las mismas tendencias que la fenómenología de las grandes masas. Este problema, que durante la segunda mitad del siglo XX parecía ser una oposición indisoluble, se contempla ahora en una variedad de escenarios en que la mayoría de los fenómenos observables se ubican en órdenes superiores de complejidad, alejándose de la fenómenología cuántica. Pero no para todos los casos, especialmente cuando se preservan los mismos principios potenciales en concordancia con una autosemejanza estructural y armónica propias (Berezovsky 2019) –refinamiento sobre Pareyón (2011, 250-251, 484; 2016)–. Por ejemplo, ocurre con la mecánica de zeolitas de sílice puro, con un comportamiento sobre superficies acuosas estadísticamente idéntico al de ondas-partículas (Cutini, Civalleri y Ugliengo 2019). Otro caso, ya referido, se encuentra en el comportamiento de los orbitales atómicos y el de las figuras de Chladni estudiadas por la acústica en placas circulares o de otras geometrías que reproducen a escala inclusive la forma del corte de la placa misma; también se halla en la formación y dinámica de gotas de fluidos dentro de medios con diferente densidad, y finalmente en la enorme diversidad en que la música se manifiesta.

Si la teoría de la música pudiera enriquecerse con el principio de vacancia –deformaciones de la regularidad en las estructuras periódicas bidimensionales– sobre la *Tonnetz*, entonces los mapas de la armonía tonal podrían, junto con sus fluctuaciones de onda-partícula –práctica-dinámica y fijación del tono–, ser coherentes respecto de las variaciones estructurales, formales y no formales de la armonía musical y el conjunto de sus interpretaciones. De paso, se abriría la posibilidad para estudiar esta armonía poligonal como una fenomenología de objetos que vibran, oscilan y se transforman; una noción común para la teoría de la música cuando observamos esta como fenómeno de tema y variaciones.

La música es un sistema de energía que se caracteriza por la forma en que se distribuyen sus fuerzas en un rango de frecuencias a lo largo de un tiempo. Esta conceptuación abierta trasciende el enfoque tradicional de acústica musical, porque no concentra la atención sobre la mecánica vibratoria y sus resonancias, sino que encuentra correspondencias en la armonización misma de los criterios de materia y energía, sin menospreciar su relación con la biología y la complejidad social y psicológica. Así, y dado que es posible describir las fuerzas de un sistema dinámico por los campos eléctricos y magnéticos de una dinámica emergente, las descripciones de los procesos armónicos de la energía y la materia serían de interés central para la teoría de la música junto con su parafernalia geométrica, topológica y algebraica, como lo implica la teoría de grupos y la de categorías. Finalmente, tal vez los números, al menos la fenomenología de los números primos y su áurea sumatoria o fraccionaria, sean una forma de gestualidad rectora sobre la materia física.

Referencias bibliográficas

Ashton, Anthony. 2001. *Harmonograph: A Visual Guide to the Mathematics of Music*. Glastonbury: Wooden Books.

Babbitt, Milton. 1961. "Set structure as a compositional determinant". *Journal of Music Theory* 5 (1): 72-94.

Barlow, Clarence. 2011. *On Musiquantics*. La Haya: Royal Conservatory The Hague.

beim Graben, Peter y Maria Mannone. 2020. "Musical pitch quantization as an eigenvalue problem". *Journal of Mathematics and Music* 14 (3): 329-346. https://doi.org/10.1080/17459737.2020.1763488

Berezovsky, Jesse. 2019. "The structure of musical harmony as an ordered phase of sound: A statistical mechanics approach to music theory". *Science Advances* 5 (5). https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.aav8490

Bretscher, Egon y John D. Cockcroft. 1955. "Enrico Fermi. 1901–1954". *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* 1: 68-78.

Carey, Norman y David Clampitt. 1989. "Aspects of well-formed scales". *Music Theory Spectrum* 11 (2): 187-206. https://doi.org/10.2307/745935

Cartwright, Julyan H. E., Jack Douthett, Diego L. González, Richard Krantz y Oreste Piro. 2010. "Two musical paths to the Farey series and the Devil's staircase". *Journal of Mathematics and Music* 4 (1): 57-74. https://doi.org/10.1080/17459737.2010.485001

Cohn, Henry, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko y Maryna Viazovska. 2017. "The sphere packing problem in dimension 24". *Annals of Mathematics* 185 (3): 1017-1033. https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.8.code

Copérnico, Nicolás. 1543. *De revolutionibus orbium coelestium*. Nuremberg: Johannes Petreius.

Cutini, Michele, Bartolomeo Civalleri y Piero Ugliengo. 2019. "Cost-effective quantum mechanical approach for predicting thermodynamic and mechanical stability of pure-silica zeolites". *ACS Omega* 4 (1): 1838-1846. https://doi.org/10.1021/acsomega.8b03135

Darío, Rubén. [1914] 1990. *Autobiografía*. Madrid: Mondadori.

Dirichlet, Peter Gustave. 1863. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn.

Douthett, Jack y Peter Steinbach. 1998. "Parsimonious graphs: A study in parsimony, contextual transformation, and modes of limited transposition". *Journal of Music Theory* 42 (2): 241-263.

Đurđevich, Micho. 2017. "Music of quantum circles". En *The Musical-Mathematical Mind: Patterns and Transformations*, editado por Gabriel Pareyón, Silvia Pina-Romero, Octavio A. Agustín-Aquino y Emilio Lluis-Puebla, 99-110. Berlín: Springer.

Estrada, Julio y Víctor Adán. 2004 *La transformación continua de la forma de onda por medio del potencial combinatorio de sus intervalos de tiempo*. Ciudad de México: International Society of Musical Acoustics y Universidad Nacional Autónoma de México.

Estrada, Julio y Jorge Gil. 1984. *Música y teoría de grupos finitos (3 variables booleanas)*. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Euclides. [s.f.] 1991. *Elementos: Libros I-IV.* Madrid: Gredos.

Euler, Leonhard. 1739. *Tentamen novae theoriae musicae. Ex certissimis harmoniae principiis dilvcide expositae*. Petropoli: Ex typographia Academiae scientiarvm.

Fludd, Robert. 1621. *Utriusque cosmi maioris scilicet et minoris metaphysica, physica atque technica historia*. Oppenheim: Johann Theodor de Bry.

Fourier, Joseph. 1822. *Théorie analytique de la chaleur*. París: Firmin Didot.

Fukunaga, Toshiya M., Takahide Kato, Koki Ikemoto y Hiroyuki Isobe. 2022. "A minimal cage of a diamond twin with chirality". *Proceedings of the National Academy of Sciences* 119 (7): e2120160119. https://doi.org/10.1073/pnas.2120160119

Gabor, Denis. 1947. "Acoustical quanta and the theory of hearing". *Nature* 159 (4044): 591-594. https://doi.org/10.1038/159591a0

Geim, Andre K. y Konstantin Novoselov. 2007. "The rise of graphene". *Nature Materials* 6: 183-191. https://doi.org/10.1038/nmat1849

Guyon, Etienne, Jean-Yves Delenne y Farhang Radjai. 2020. *Built on Sand: The Science of Granular Materials*. Cambridge, MA: MIT Press.

Hindemith, Paul. 1937. *Unterweisung im Tonsatz*. Mainz: Schott.

Jaramillo Ramírez, Nicolás. 2022. "Infinitos puntos entre el sí y el no: perceptos en la creación musical". Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.

Jedrzejewski, Franck. 2020. "Forms of life of mathematical objects". *Rue Descartes* 97 (1): 115-130.

Kepler, Johannes. 1619. *Harmonices Mundi*. Frankfurt: Gottfried Tampach.

Klein, Felix. [1872] 1893. "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen". *Mathematische Annalen* 43: 63-100.

Lewin, David. 1990. "Klumpenhouwer networks and some isographies that involve them." *Music Theory Spectrum* 12 (1): 83-120. https://doi.org/10.2307/746147

Mazzola, Guerino. 1990. *Geometrie der Töne*. Basilea: Birkhäuser.

———. 2017. "Gestural dynamics in modulation: (Towards) a musical string theory". En *The Musical-Mathematical Mind: Patterns and Transformations*, editado por Gabriel Pareyón, Silvia Pina-Romero, Octavio A. Agustín-Aquino y Emilio Lluis-Puebla, 171-188. Berlín: Springer.

Mazzola, Guerino y Moreno Andreatta. 2007. "Diagrams, gestures and formulae in music". *Journal of Mathematics and Music* 1 (1): 23-46. https://doi.org/10.1080/17459730601137716

McClain, Ernest G. 1974. "Musical *Marriages* in Plato's *Republic*". *Journal of Music Theory* 18 (2): 242-272.

Morris, Robert. 1987. *Composition with Pitch-Classes: A Theory of Compositional Design*. New Haven: Yale University Press.

Narushima, Terumi. 2018. *Microtonality and the Tuning Systems of Erv Wilson*. Londres y Nueva York: Routledge.

Pareyón, Gabriel. 2011. *On Musical Self-Similarity: Intersemiosis as Synecdoche and Analogy*. Helsinki e Imatra: Acta Semiotica Fennica.

———. 2015. "Posibles efectos de las frecuencias del carbono en estructuras (pre)bióticas como contexto orgánico para la bioacústica". En *Memorias del Primer Congreso de la Asociación Mexicana del Carbono*, editado por René Rangel Méndez, 92-94. Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica.

———. 2016. "Music as a carbon language: A mathematical analogy and its interpretation in biomusicology." *MusMat - Brazilian Journal of Music and Mathematics* 1 (1): 25-43.

———. 2017. "Tuning systems nested within the Arnold tongues: Musicological and structural interpretations". En *The Musical-Mathematical Mind: Patterns and Transformations*, editado por Gabriel Pareyón, Silvia Pina-Romero, Octavio A. Agustín-Aquino y Emilio Lluis-Puebla, 221-230. Berlín: Springer.

———. 2021. *Resonancias del abismo como nación*. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Pareyón, Gabriel, Christian Óscar Chavarría-Velázquez y Rafael López-Martínez. 2017. "Harmonic piezoelectric induction onto carbon-based biostructures using ultrasonic frequency modulation". En *Memorias del Segundo Congreso de la Asociación Mexicana del Carbono*, editado por René Rangel Méndez, 196-199. Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica.

Pareyón, Gabriel y Silvia Pina-Romero. 2017. "Wooden idiophones: Classification through phase synchronization analysis". En *The Musical-Mathematical Mind: Patterns and Transformations*, editado por Gabriel Pareyón, Silvia Pina-Romero, Octavio A. Agustín-Aquino y Emilio Lluis-Puebla, 231-241. Berlín: Springer.

Patterson, Roy D. 1986. "Spiral detection of periodicity and the spiral form of musical scales". *Psychology of Music* 14 (1): 44-61. https://doi.org/10.1177/0305735686141004

Ruckmick, Christian A. 1929. "A new classification of tonal qualities". *Psychological Review* 36 (2): 172-180. https://doi.org/10.1037/h0073050

Rudin, Walter. 1987. *Real and Complex Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill.

Schwarzschild, Karl. 1916. *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit*. Berlín: Reimer.

Shepard, Roger N. 1982. "Geometrical approximations to the structure of musical pitch". *Psychological Review* 89 (4): 305-333. https://doi.org/10.1037/0033-295X.89.4.305

Skyrme, Raymond. 1977. *Rubén Darío and the Pythagorean Tradition*. Tallahassee: University of Florida.

Tarasti, Eero. 2000. *Existential Semiotics*. Bloomington: Indiana University Press.

———. 2012. *Semiotics of Classical Music: How Mozart, Brahms and Wagner Talk to Us*. Berlín: De Gruyter Mouton.

Teón de Esmirna. [s.f.] 1966. *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*. Leipzig: Teubner.

Toussaint, Godfried T. 2019. *The Geometry of Musical Rhythm*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Zarlino, Gioseffo. 1573. *Istitutioni Harmoniche*. Venecia: Franceschi Senese.